



TITLE:

Cauchy問題の解の特異性の伝播について(複素解析と大域解析:微分方程式の視点から)

AUTHOR(S):

筒井, 亨

CITATION:

筒井, 亨. Cauchy問題の解の特異性の伝播について(複素解析と大域解析:微分方程式の視点から). 数理解析研究所講究録 1989, 683: 85-90

ISSUE DATE:

1989-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101173>

RIGHT:

Cauchy 問題の解の特異性の伝播について

千葉大理学部 筒井 亨 (Toru Tsutsui)

複素領域での Cauchy 問題の解がどこに特異性を持つのか
初期 data の singular locus が nonsingular でない場合、依然不明
である。一例として、 \mathbb{C}^3 ((t, x, y)) で Cauchy 問題

$$(1) \begin{cases} (D_t - D_x - D_y)(D_t + D_x + D_y)u(t, x, y) = 0 \\ u(0, x, y) = 0 \\ D_t u(0, x, y) = \frac{1}{xy} \end{cases}$$

を考へる。この解は、

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \int_0^t \frac{dz}{(x-t+iz)(y-t+iz)} \\ &= \frac{1}{2(x-y)} \{ \log(x-t) - \log(y-t) + \log(y+t) - \log(x+t) \} \end{aligned}$$

であつて、初期 data の singular locus を通る characteristic surface
 $x \pm t = 0$, $y \pm t = 0$ 以外に $x - y = 0$ 上に特異性を持つ (す
なわち、解 u にとつては、初期面の乗つてゐる branch におい
てだけ、たまたま singular locus $x - y = 0$ が消えているに過

ぎない)。

このような現象をどう理解すべきなのか, 実はよくわかっていない。ただし, 次のようなことは成り立つ。

\mathbb{C}^{n+1} 内の原点の近傍 Ω における正則関数係数 m 階線型偏微分作用素

$$P(x, D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 \leq m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ただし,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x'), \quad a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

を考える。

仮定 1. $|\alpha| = m \Rightarrow a_\alpha(x) \equiv a_\alpha \in \mathbb{C}$

$S = \{x_0 = 0\}$, $V \in S \cap \Omega$ 内の $\text{codim. } 1$ の analytic subset とし, S の既約分解 (原点での germ の意味で) と

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_N$$

$$V_\nu = \{x' \in S \cap \Omega \mid f_\nu(x') = 0\} \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

とする。 $\Omega \cap (S \setminus V)$ の universal covering space 上で正則な函数 $w_h(x')$ ($0 \leq h \leq m-1$) に対して Cauchy 問題

$$(2) \quad \begin{cases} P(x, D) u(x) = 0 \\ D_0^h u(0, x') = w_h(x') \end{cases} \quad (0 \leq h \leq m-1)$$

を考える。さらに次の仮定を置く。

仮定 2. 主シンボル $g(\xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ は $\mathbb{C}[\xi_0, \dots, \xi_n]$ 内

で 1 次式の積に分解する:

$$g(\xi) = \prod_{j=1}^m (\xi_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \xi_i) = \prod_{j=1}^m (\xi_0 - \langle \lambda_j, \xi' \rangle)$$

ただし, $\lambda_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jn}) \in \mathbb{C}^n$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ と置いた.

仮定 3 各 V_ν ($\nu=1, \dots, N$) は, $x=0$ で非特異, すなわち,

$$\text{grad } f_\nu(0) = \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial f_\nu}{\partial x_n}(0) \right) \neq 0$$

仮定 4 特性根は単純: すなわち, $\forall j \neq j', \forall \nu=1, \dots, N$ に対して,

$$\langle \lambda_j, \text{grad } f_\nu(0) \rangle \neq \langle \lambda_{j'}, \text{grad } f_\nu(0) \rangle$$

各 $\nu=1, \dots, N$ に対して, V_ν を通る特性超曲面 K_ν を

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_0}(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \frac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_i}(x) = 0 \\ k_{j\nu}(0, x') = f_\nu(x') \end{cases}$$

の正則解 $k_{j\nu}(x)$ によって, $K_{j\nu} = \{ k_{j\nu}(x) = 0 \}$ で定義する.

さらに, 超曲面 $K'_{j, JJ', \mu\nu}$ ($j, J, J'=1, \dots, m, J \neq J', \mu, \nu=1, \dots, N, \mu \neq \nu$) を,

$$K'_{j, JJ', \mu\nu} = \{ c_{j, JJ', \mu}(x) k_{j\nu}(x) = c_{j, JJ', \nu}(x) k_{j\mu}(x) \}$$

ただし,

$$c_{j, JJ', \mu}(x) = \sum_{i=1}^n (\lambda_{Ji} - \lambda_{J'i}) \partial_i k_{j\mu}(x)$$

で定義する. $K'_{j, JJ', \mu\nu}$ は $\xi_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \xi_i$ に関して特性的であるが, V_1, \dots, V_N を通らない.

$K_j = \bigcup_{\nu=1}^N K_{j\nu}$, $K'_j = \bigcup_{J \neq J'} \bigcup_{\mu \neq \nu} K'_{j, JJ', \mu\nu}$ と置く. ($N=1$ ならば $K'_j = \emptyset$ に注意).

定理 以上の仮定の下で Cauchy 問題 (2) の unique な

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$$

$$u_j(x) \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega' \setminus (K_j \cup K'_j))$$

と書ける。ここで、 Ω' は Ω に含まれる $x=0$ の近傍。

証明は Wagschal の idea によって逐次近似によって成される。

だが、いかにも仮定が多すぎるし、その仮定は証明がうまくいくために付けたものにはかならない。

すでに V が非特異な超曲面が交叉したものだという仮定自体、本質を置いていないもののように思える。

例を挙げよう。

$$(3) \quad \begin{cases} (D_t - D_x)(D_t - D_y)u(t, x, y) = 0 \\ u(0, x, y) = 0 \\ D_t u(0, x, y) = (x^2 - y^3)^\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

解は、 $x^2 - y^3 = 0$ を通る characteristic surface

$$f_1 = x^2 - (y+t)^3 = 0$$

$$f_2 = (x+t)^2 - y^3 = 0$$

上に singularity を持つことは確かであるが、それ以外にどこに singularity を持つか？ (3) の解 u は次の積分で与えられる。

$$u(t, x, y) = \int_0^t \left\{ (x+t-s)^2 - (y+s)^3 \right\}^\lambda ds$$

この関数 u の特異性は、被積分関数の特異点集合

$$F(z) = (x+t-z)^2 - (y+z)^3 = 0$$

において、まず、 z が端点と一致するという条件から

$$V(f_1) = \{f_1 = 0\}, \quad V(f_2) = \{f_2 = 0\}$$

(end point singularity) および $F(z)$ の判別式集合上に現れる (pinching singularity) (cf. Kobayashi, Math. Ann. 269, 217-234 (1984)). $F(z)$ の判別式を計算してみると

$$(x+y+t)^3 \{4 - 27(x+y+t)\}$$

であるから、次の2つの集合上にも解 u の特異性がある。

$$V(f_3) = \{f_3 = x+y+t=0\}$$

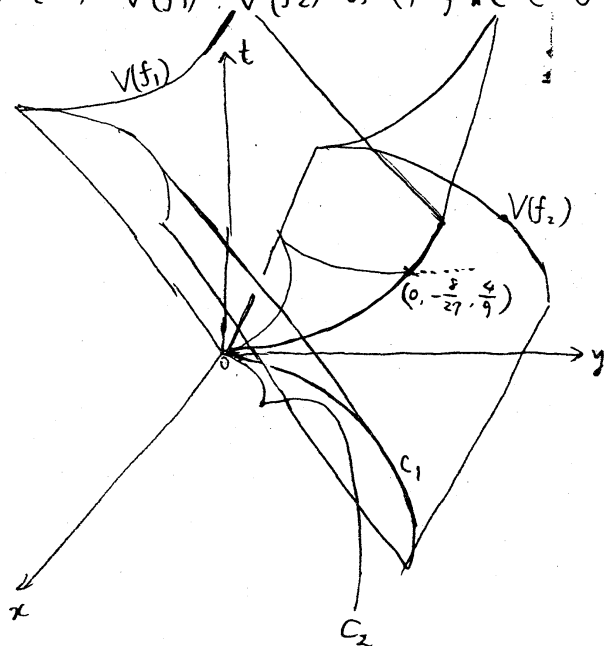
$$V(f_4) = \{f_4 = x+y+t - \frac{4}{27} = 0\}$$

$V(f_3), V(f_4)$ は $(D_t - D_x), (D_t - D_y)$ のいずれに対しても特异的。

$V(f_3)$ は初期 data の singular locus $t = x^2 - y^3 = 0$ の特異点

$t = x = y = 0$ を通る。又、 $V(f_4)$ は点 $(t, x, y) = (0, -\frac{8}{27}, \frac{4}{9})$

において、 $V(f_1), V(f_2)$ のいずれとも接している。



なお、図で C_1, C_2 と書いたのは

$$V(f_1, f_2) = C_1 \vee C_2$$

$$C_1 = \{t = x^2 - y^2 = 0\}$$

$$C_2 = \{x^2 - (y+t)^2 = (3y^2 + 2x) + (3y+1)t + t^2 = 0\}$$

と2つの既約成分に分かれるから、これを大体書き込んだものである。

\mathbb{C}^m 内での原点の近傍で正則な関数を係数とする偏微分作用素 $P(x, D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 \leq m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$ の主表象 $g(x, \xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ に対して $g(0, x'; \xi)$ の ξ_0 の多項式としての判別式を $h(x', \xi')$ とする。初期 data $w_h(x')$ の特異点集合を $V = \{f(x') = 0\}$ とし、それに対して解 u の特異点集合を Σ とすると、以上の例で見たように、 $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{t=0\}$ は必ずしも V と一致しないが、次のように予想している。

予想 Σ_0 は V と $h(x', \xi')$ とから構成できる。